# Constructive semantic cut elimination

Olivier Hermant

November 10, 2006

# Élimination des coupures sémantique

$$
\begin{tikzcd}
\Gamma \vdash \Delta \arrow[r, shift left, "\text{correction}"] \arrow[d, "\begin{array}{c}\text{Gentzen}\\ \text{Tait-Girard}\\ \text{Dowek-Werner}\\ \ldots\end{array}"'] & \Gamma \models \Delta \arrow[l, shift left, "\text{complétude}"] \\
\Gamma \vdash^{cf} \Delta &
\end{tikzcd}
$$

# Élimination des coupures sémantique

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
\Gamma \vdash \Delta \arrow[r, shift left, "\text{correction}"] \arrow[d, "\substack{\text{Gentzen} \\ \text{Tait-Girard} \\ \text{Dowek-Werner} \\ \dots}"'] & \Gamma \models \Delta \arrow[l, shift left, "\text{complétude}"] \arrow[dl, "\text{complétude forte}"'] \\
\Gamma \vdash^{cf} \Delta &
\end{tikzcd}
$$

# Élimination des coupures sémantique

$$
\begin{tikzcd}
\Gamma \vdash \Delta \arrow[r, "\text{correction}"] & \Gamma \models \Delta \arrow[dl, "\text{complétude forte}"] \\
\Gamma \vdash^{cf} \Delta &
\end{tikzcd}
$$

# Élimination des coupures sémantique

$$
\begin{tikzcd}
\Gamma \vdash \Delta \arrow[r, "\text{correction}"] & \Gamma \models \Delta \arrow[dl, "\text{complétude forte}"'] \arrow[d, shift left, "\text{Complétude des tableaux}"] \\
\Gamma \vdash^{cf} \Delta & \mathrm{Tab}\,(T\emptyset \Vdash \Gamma, F\emptyset \Vdash \Delta) \hookrightarrow \odot \arrow[u, shift left, "\text{correction}"]
\end{tikzcd}
$$

# Élimination des coupures sémantique

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\Gamma \vdash \Delta \arrow[r, "\text{correction}"] & \Gamma \models \Delta \arrow[d, "\text{Complétude des tableaux}"] \arrow[dl, "\text{complétude forte}"'] \\
\Gamma \vdash^{cf} \Delta & \mathrm{Tab}\,(T\emptyset \Vdash \Gamma,\ F\emptyset \Vdash \Delta) \hookrightarrow \odot \arrow[l, "\text{correction des tableaux}"]
\end{tikzcd}
$$

# Déduction Modulo

Logique + Règles de Réécriture

- Le calcul des séquents intuitionniste

# Déduction Modulo

Logique + Règles de Réécriture

- Le calcul des séquents intuitionniste
- réécriture sur des termes:

$$\begin{aligned} x + 0 &\longrightarrow x \\ x * 0 &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

# Déduction Modulo

Logique + Règles de Réécriture

- Le calcul des séquents intuitionniste
- réécriture sur des termes:

$$\begin{array}{rcl} x + 0 & \rightarrow & x \\ x * 0 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

- réécriture sur des propositions:

$$\begin{array}{rcl} x * y = 0 & \rightarrow & x = 0 \vee y = 0 \\ P(0) & \rightarrow & \forall x P(x) \end{array}$$

# Déduction Modulo

Logique + Règles de Réécriture

- Le calcul des séquents intuitionniste
- réécriture sur des termes:

$$\begin{array}{rcl} x+0 & \rightarrow & x \\ x*0 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

- réécriture sur des propositions:

$$\begin{array}{rcl} x*y=0 & \rightarrow & x=0 \vee y=0 \\ P(0) & \rightarrow & \forall x P(x) \end{array}$$

- Puissance expressive: on peut transformer des axiomes en règles de réécriture.

# Le calcul des séquents intuitionniste

$$\frac{}{\Gamma, P \vdash P}\text{axiom} \qquad \frac{\Gamma, P \vdash Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q}\text{cut}$$

$$\frac{\Gamma, P, P \vdash Q}{\Gamma, P \vdash Q}\text{contr-l} \qquad \frac{}{\Gamma, \bot \vdash Q}\bot\text{-l}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash R \quad \Gamma, Q \vdash R}{\Gamma, P \vee Q \vdash R}\vee\text{-l} \qquad \frac{\Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash P \vee Q}\vee\text{-r} \qquad \frac{\Gamma \vdash Q}{\Gamma \vdash P \vee Q}\vee\text{-r}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P \quad \Gamma, Q \vdash R}{\Gamma, P \Rightarrow Q \vdash R}\Rightarrow\text{-l} \qquad \frac{\Gamma, P \vdash Q}{\Gamma \vdash P \Rightarrow Q}\Rightarrow\text{-r}$$

$$\frac{\Gamma, \{c/x\}P \vdash Q}{\Gamma, \exists x P \vdash Q}\exists\text{-l, } c \text{ fresh constant} \qquad \frac{\Gamma \vdash \{t/x\}P}{\Gamma \vdash \exists x P}\exists\text{-r}$$

# Le calcul des séquents intuitionniste

$$\frac{}{\Gamma, P \vdash P}\text{axiom} \qquad \frac{\Gamma, P \vdash Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q}\text{cut}$$

$$\frac{\Gamma, P, P \vdash Q}{\Gamma, P \vdash Q}\text{contr-l} \qquad \frac{}{\Gamma, \bot \vdash Q}\bot\text{-l}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash R \quad \Gamma, Q \vdash R}{\Gamma, P \vee Q \vdash R}\vee\text{-l} \qquad \frac{\Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash P \vee Q}\vee\text{-r} \qquad \frac{\Gamma \vdash Q}{\Gamma \vdash P \vee Q}\vee\text{-r}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P \quad \Gamma, Q \vdash R}{\Gamma, P \Rightarrow Q \vdash R}\Rightarrow\text{-l} \qquad \frac{\Gamma, P \vdash Q}{\Gamma \vdash P \Rightarrow Q}\Rightarrow\text{-r}$$

$$\frac{\Gamma, \{c/x\}P \vdash Q}{\Gamma, \exists x P \vdash Q}\exists\text{-l, } c \text{ fresh constant} \qquad \frac{\Gamma \vdash \{t/x\}P}{\Gamma \vdash \exists x P}\exists\text{-r}$$

# Le calcul des séquents intuitionniste modulo

On remplace:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \vee\text{-g (LJ)}$$

par:

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} A \qquad \Gamma \vdash_{\mathcal{R}} B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} C} \vee\text{-g (LJmod)} C \equiv_{\mathcal{R}} A \wedge B$$

# Le calcul des séquents intuitionniste modulo

On remplace:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \vee\text{-g (LJ)}$$

par:

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} A \qquad \Gamma \vdash_{\mathcal{R}} B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} C} \vee\text{-g (LJmod)} C \equiv_{\mathcal{R}} A \wedge B$$

La contrainte $C \equiv_{\mathcal{R}} A \wedge B$ est un degré de liberté.

# Calcul des séquents intuitionniste modulo

$$\frac{}{\Gamma, P \vdash Q}\text{axiom } P \equiv_{\mathcal{R}} Q \qquad \frac{\Gamma, P \vdash Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q}\text{cut } P \equiv_{\mathcal{R}} Q$$

$$\frac{\Gamma, P, Q \vdash R}{\Gamma, P \vdash R}\text{contr-l } P \equiv_{\mathcal{R}} Q \qquad \frac{}{\Gamma, P \vdash Q}\bot\text{-l } P \equiv_{\mathcal{R}} \bot$$

$$\frac{\Gamma \vdash P \quad \Gamma, Q \vdash R}{\Gamma, S \vdash R} \Rightarrow\text{-l } P \Rightarrow Q \equiv S \qquad \frac{\Gamma, P \vdash Q}{\Gamma \vdash S} \Rightarrow\text{-r } P \Rightarrow Q \equiv_{\mathcal{R}} S$$

$$\frac{\Gamma, \{c/x\}P \vdash Q}{\Gamma, R \vdash Q}\exists\text{-l}^* \ \exists x P \equiv_{\mathcal{R}} R \qquad \frac{\Gamma \vdash \{t/x\}P}{\Gamma \vdash R}\exists\text{-r } \exists x P \equiv_{\mathcal{R}} R$$

# Calcul des séquents intuitionniste modulo

$$\frac{}{\Gamma, P \vdash Q}\text{axiom } P \equiv_{\mathcal{R}} Q \qquad \frac{\Gamma, P \vdash Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q}\text{cut } P \equiv_{\mathcal{R}} Q$$

$$\frac{\Gamma, P, Q \vdash R}{\Gamma, P \vdash R}\text{contr-l } P \equiv_{\mathcal{R}} Q \qquad \frac{}{\Gamma, P \vdash Q}\bot\text{-l } P \equiv_{\mathcal{R}} \bot$$

$$\frac{\Gamma \vdash P \quad \Gamma, Q \vdash R}{\Gamma, S \vdash R} \Rightarrow\text{-l } P \Rightarrow Q \equiv S \qquad \frac{\Gamma, P \vdash Q}{\Gamma \vdash S} \Rightarrow\text{-r } P \Rightarrow Q \equiv_{\mathcal{R}} S$$

$$\frac{\Gamma, \{c/x\}P \vdash Q}{\Gamma, R \vdash Q}\exists\text{-l}^* \ \exists x P \equiv_{\mathcal{R}} R \qquad \frac{\Gamma \vdash \{t/x\}P}{\Gamma \vdash R}\exists\text{-r } \exists x P \equiv_{\mathcal{R}} R$$

# Sémantique: les structures de Kripke

Sémantiques intuitionnistes:

# Sémantique: les structures de Kripke

Sémantiques intuitionnistes:

- algèbres de Heyting [Lipton,Okada]

# Sémantique: les structures de Kripke

Sémantiques intuitionnistes:

- algèbres de Heyting [Lipton,Okada]
- structures de Kripke

# Sémantique: les structures de Kripke

Sémantiques intuitionnistes:

- structures de Kripke

Une structure de Kripke (KS) est un quadruplet $\langle K, \leq, D, \Vdash \rangle$:

# Sémantique: les structures de Kripke

Sémantiques intuitionnistes:

- structures de Kripke

Une structure de Kripke (KS) est un quadruplet $\langle K, \leq, D, \Vdash \rangle$:

- $K$ l'ensemble des mondes, ordonné partiellement par $\leq$

Sémantiques intuitionnistes:

- structures de Kripke

Une structure de Kripke (KS) est un quadruplet $\langle K, \leq, D, \Vdash \rangle$:

- $K$ l'ensemble des mondes, ordonné partiellement par $\leq$
- $D : \alpha \rightarrow \mathcal{S}et$ une fonction monotone (interprète les termes).

# Sémantique: les structures de Kripke

Sémantiques intuitionnistes:

- structures de Kripke

Une structure de Kripke (KS) est un quadruplet $\langle K, \leq, D, \Vdash \rangle$:

- $K$ l'ensemble des mondes, ordonné partiellement par $\leq$
- $D : \alpha \rightarrow \mathcal{S}et$ une fonction monotone (interprète les termes).
- $\Vdash$ est une relation entre les mondes et les propositions, qui vérifie entre autres:

# Sémantique: les structures de Kripke

- $A$ atomique: si $\alpha \leq \beta$ et $\alpha \Vdash A$, alors $\beta \Vdash A$.
- $\alpha \Vdash P \Rightarrow Q$ ssi pour tout $\beta \geq \alpha$ si $\beta \Vdash P$ alors $\beta \Vdash Q$.
- $\alpha \Vdash \neg P$ ssi pour tout $\beta \geq \alpha$, $\beta \nVdash P$.

- $\alpha \Vdash P \vee Q$ ssi $\alpha \Vdash P$ ou $\alpha \Vdash Q$.

# Sémantique: les structures de Kripke

- $A$ atomique: si $\alpha \leq \beta$ et $\alpha \Vdash A$, alors $\beta \Vdash A$.
- $\alpha \Vdash P \Rightarrow Q$ ssi pour tout $\beta \geq \alpha$ si $\beta \Vdash P$ alors $\beta \Vdash Q$.
- $\alpha \Vdash \neg P$ ssi pour tout $\beta \geq \alpha$, $\beta \nVdash P$.
- $\alpha \Vdash P \vee Q$ ssi $\alpha \Vdash P$ ou $\alpha \Vdash Q$.

Ce n'est pas une définition faite pour la constructivité: on incruste dans les mondes des valeurs de vérité vrai/faux. Il faut être plus modeste.

# Sémantique: les structures de Kripke

- $A$ atomique: si $\alpha \leq \beta$ et $\alpha \Vdash A$, alors $\beta \Vdash A$.
- $\alpha \Vdash P \Rightarrow Q$ ssi pour tout $\beta \geq \alpha$ si $\beta \Vdash P$ alors $\beta \Vdash Q$.

- $\alpha \Vdash \neg P$ ssi pour tout $\beta \geq \alpha$, $\beta \Vdash P$ implique $\beta \Vdash \bot$.
- $\alpha \Vdash P \vee Q$ ssi $\alpha \Vdash P$ ou $\alpha \Vdash Q$.
- $\alpha \Vdash \bot$ implique $\beta \Vdash P$ pour toute proposition $P$, tout monde $\beta$ (Structure "impropre").

# structures de Kripke en Déduction Modulo

- Contrainte supplémentaire:

$$P \equiv_{\mathcal{R}} Q \quad \text{implique} \quad \alpha \Vdash P \Leftrightarrow \alpha \Vdash Q$$

# La méthode des tableaux

- algorithme de recherche exhaustive de tous les modèles possibles (chaque branche du tableau en représente un).
- recherche de contre-modèle (non impropre).

# La méthode des tableaux

- algorithme de recherche exhaustive de tous les modèles possibles (chaque branche du tableau en représente un).
- recherche de contre-modèle (non impropre).
- quelques règles (conditions sur $q$):

$$\begin{array}{c} Tp \Vdash A \vee B \\ \diagup \quad \diagdown \\ Tp \Vdash A \qquad Tp \Vdash B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} Fp \Vdash A \vee B \\ | \\ Fp \Vdash A \\ | \\ Fp \Vdash B \end{array}$$

$$\begin{array}{c} Tp \Vdash A \Rightarrow B \\ \diagup \quad \diagdown \\ Tq \Vdash B \qquad Fq \Vdash A \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} Fp \Vdash A \Rightarrow B \\ | \\ Tq \Vdash A \\ | \\ Fq \Vdash B \end{array}$$

# Tableau: exemple 1

Mondes = séquences d'entiers

$$T\emptyset \Vdash A \vee B, F\emptyset \Vdash C \Rightarrow A$$

# Tableau: exemple 1

Mondes = séquences d'entiers

$$T\emptyset \Vdash A \vee B, F\emptyset \Vdash C \Rightarrow A$$

# Tableau: exemple 1

Mondes = séquences d'entiers

$$\begin{array}{c} T\emptyset \Vdash A \vee B, F\emptyset \Vdash C \Rightarrow A \\ | \\ T1 \Vdash C \\ | \\ F1 \Vdash A \end{array}$$

# Tableau: exemple 1

Mondes = séquences d'entiers

$$\begin{array}{c} T\emptyset \Vdash A \vee B, F\emptyset \Vdash C \Rightarrow A \\ | \\ T1 \Vdash C \\ | \\ F1 \Vdash A \end{array}$$

# Tableau: exemple 1

Mondes = séquences d'entiers

$$
\begin{array}{c}
T\emptyset \Vdash A \vee B, F\emptyset \Vdash C \Rightarrow A \\
| \\
T1 \Vdash C \\
| \\
F1 \Vdash A \\
\diagup \quad \diagdown \\
\color{red}{T\emptyset \Vdash A} \quad \color{red}{T\emptyset \Vdash B}
\end{array}
$$

# Tableau: exemple 1

Mondes = séquences d'entiers

$$\begin{array}{c}
T\emptyset \Vdash A \vee B, F\emptyset \Vdash C \Rightarrow A \\
| \\
T1 \Vdash C \\
| \\
F1 \Vdash A \\
\begin{array}{cc}
\swarrow & \searrow \\
\begin{array}{c} T\emptyset \Vdash A \\ | \\ \color{red}{T1 \Vdash \bot} \end{array} & T\emptyset \Vdash B
\end{array}
\end{array}$$

# Tableau: exemple 2

$$F_{\varnothing} \Vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow B$$

# Tableau: exemple 2

$$\begin{array}{c} F_{\varnothing} \Vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow B \\ | \\ T_1 \Vdash (A \Rightarrow B) \\ | \\ F_1 \Vdash A \Rightarrow B \end{array}$$

# Tableau: exemple 2

$$
\begin{array}{c}
F_{\varnothing} \Vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow B \\
| \\
T_1 \Vdash (A \Rightarrow B) \\
| \\
F_1 \Vdash A \Rightarrow B \\
\diagup \quad \diagdown \\
F_1 \Vdash A \qquad T_1 \Vdash B
\end{array}
$$

# Tableau: exemple 2

$$
\begin{array}{ccc}
 & F_\varnothing \Vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow B & \\
 & | & \\
 & T_1 \Vdash (A \Rightarrow B) & \\
 & | & \\
 & F_1 \Vdash A \Rightarrow B & \\
 \swarrow & & \searrow \\
F_1 \Vdash A & & T_1 \Vdash B \\
| & & \\
T_1 \Vdash (A \Rightarrow B) & &
\end{array}
$$

# Tableau: exemple 2

$$F_{\varnothing} \Vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow B$$

$$T_1 \Vdash (A \Rightarrow B)$$

$$\color{red}{F_1 \Vdash A \Rightarrow B}$$

$$F_1 \Vdash A \qquad\qquad T_1 \Vdash B$$

$$T_1 \Vdash (A \Rightarrow B)$$

$$T_{11} \Vdash A$$

$$F_{11} \Vdash B$$

# Tableau: exemple 2

- $F_\varnothing \Vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow B$
  - $T_1 \Vdash (A \Rightarrow B)$
    - $F_1 \Vdash A \Rightarrow B$
      - $F_1 \Vdash A$
        - $\color{red}{T_1 \Vdash (A \Rightarrow B)}$
          - $T_{11} \Vdash A$
            - $F_{11} \Vdash B$
              - $F_{11} \Vdash A$
              - $T_{11} \Vdash B$
      - $T_1 \Vdash B$

# Tableau: exemple 2

$$F_\varnothing \Vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow B$$

$$T_1 \Vdash (A \Rightarrow B)$$

$$F_1 \Vdash A \Rightarrow B$$

$$\begin{array}{ccc} F_1 \Vdash A & \qquad & T_1 \Vdash B \\ T_1 \Vdash (A \Rightarrow B) & & \\ \color{red}{T_{11} \Vdash A} & & \\ \color{red}{F_{11} \Vdash B} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \color{red}{F_{11} \Vdash A} & \color{red}{T_{11} \Vdash B} \\ T_{11} \Vdash \bot & T_{11} \Vdash \bot \end{array}$$

# Tableau: exemple 2

$$F_\varnothing \Vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow B$$

$$T_1 \Vdash (A \Rightarrow B)$$

$$F_1 \Vdash A \Rightarrow B$$

$$F_1 \Vdash A \qquad\qquad T_1 \Vdash B$$

$$T_1 \Vdash (A \Rightarrow B)$$

$$T_{11} \Vdash A$$

$$F_{11} \Vdash B$$

$$F_{11} \Vdash A \qquad T_{11} \Vdash B$$

$$T_{11} \Vdash \bot \qquad T_{11} \Vdash \bot \qquad \bot$$

# Tableaux intuitionnistes modulo

On rajoute en plus les règles:

$$\begin{array}{c} T_p \Vdash P \\ | \\ T_p \Vdash Q \end{array} \qquad \begin{array}{c} F_p \Vdash P \\ | \\ F_p \Vdash Q \end{array} \qquad \text{dès lors que } P \equiv_{\mathcal{R}} Q.$$

Méthode de recherche systématique et complète de preuve:

- on énumère chacune des assertions sur l'arbre et on les traite équitablement.

# Tableaux intuitionnistes modulo

On rajoute en plus les règles:

$$\begin{array}{c} T_p \Vdash P \\ | \\ T_p \Vdash Q \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} F_p \Vdash P \\ | \\ F_p \Vdash Q \end{array} \qquad \text{dès lors que } P \equiv_{\mathcal{R}} Q.$$

Méthode de recherche systématique et complète de preuve:

- on énumère chacune des assertions sur l'arbre et on les traite équitablement.
- un nombre infini de fois les assertions $T_p \Vdash \forall x P(x)$.

# Tableaux intuitionnistes modulo

On rajoute en plus les règles:

$$\begin{array}{c} T_p \Vdash P \\ | \\ T_p \Vdash Q \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} F_p \Vdash P \\ | \\ F_p \Vdash Q \end{array} \qquad \text{dès lors que } P \equiv_{\mathcal{R}} Q.$$

Méthode de recherche systématique et complète de preuve:

- on énumère chacune des assertions sur l'arbre et on les traite équitablement.
- un nombre infini de fois les assertions $T_p \Vdash \forall x P(x)$.
- on doit aussi assurer une gestion des mondes.

# Tableaux intuitionnistes modulo

On rajoute en plus les règles:

$$\begin{array}{c} T_p \Vdash P \\ | \\ T_p \Vdash Q \end{array} \qquad \begin{array}{c} F_p \Vdash P \\ | \\ F_p \Vdash Q \end{array} \qquad \text{dès lors que } P \equiv_{\mathcal{R}} Q.$$

Méthode de recherche systématique et complète de preuve:

- on énumère chacune des assertions sur l'arbre et on les traite équitablement.
- un nombre infini de fois les assertions $T_p \Vdash \forall x P(x)$.
- on doit aussi assurer une gestion des mondes.

DM on travaille uniquement avec des formes normales (attention aux instanciations).

# Complétude des tableaux

- une branche décrit-elle un modèle ?

# Complétude des tableaux

- une branche décrit-elle un modèle ?
- (non constructif): une branche infine décrit-elle un modèle “propre” ?

# Complétude des tableaux

- une branche décrit-elle un modèle ?
- (non constructif): une branche infine décrit-elle un modèle "propre" ?
- définir un modèle à partir d'une branche: celle-ci vérifie certaines propriétés d'exhaustivité.

# Complétude des tableaux

- une branche décrit-elle un modèle ?
- (non constructif): une branche infine décrit-elle un modèle "propre" ?
- définir un modèle à partir d'une branche: celle-ci vérifie certaines propriétés d'exhaustivité.
- prouver que le modèle est en accord avec la branche:

$$Tp \Vdash P \quad \text{implique} \quad p \Vdash P$$

# Complétude des tableaux

- une branche décrit-elle un modèle ?
- (non constructif): une branche infine décrit-elle un modèle "propre" ?
- définir un modèle à partir d'une branche: celle-ci vérifie certaines propriétés d'exhaustivité.
- prouver que le modèle est en accord avec la branche:

$$Tp \Vdash P \quad \text{implique} \quad p \Vdash P$$

- Puisque $\Gamma \vDash P$ et chaque branche décrit un modèle tel que $T_\emptyset \Vdash \Gamma$ et $F_\emptyset \Vdash P$: le modèle décrit est impropre: les branches sont finies.

# Complétude des tableaux

- une branche décrit-elle un modèle ?
- (non constructif): une branche infine décrit-elle un modèle "propre" ?
- définir un modèle à partir d'une branche: celle-ci vérifie certaines propriétés d'exhaustivité.
- prouver que le modèle est en accord avec la branche:

$$Tp \Vdash P \quad \text{implique} \quad p \Vdash P$$

- Puisque $\Gamma \models P$ et chaque branche décrit un modèle tel que $T_\emptyset \Vdash \Gamma$ et $F_\emptyset \Vdash P$: le modèle décrit est impropre: les branches sont finies.
- en Déduction Modulo: prouver que le modèle est un modèle des règles de réécriture.

# Conditions sur les règles de réécriture

Sous l'hypothèse de confluence et pour:

- Une condition d'ordre: $\succ$ est bien-fondé, possède la propriété de la sous-formule, et si $P \longrightarrow^* Q$ alors $P \succ Q$.

la méthode de tableaux est complète.

# Conditions sur les règles de réécriture

Sous l'hypothèse de confluence et pour:

- Une condition d'ordre: $\succ$ est bien-fondé, possède la propriété de la sous-formule, et si $P \longrightarrow^* Q$ alors $P \succ Q$.
- Une condition de positivité: si $A \longrightarrow P$ alors $P$ a des occurrences d'atomes uniquement positives.

la méthode de tableaux est complète.

# Conditions sur les règles de réécriture

Sous l'hypothèse de confluence et pour:

- Une condition d'ordre: $\succ$ est bien-fondé, possède la propriété de la sous-formule, et si $P \longrightarrow^* Q$ alors $P \succ Q$.
- Une condition de positivité: si $A \longrightarrow P$ alors $P$ a des occurrences d'atomes uniquement positives.
- Une condition de positivité étendue: on peut classer les atomes en deux classes, les "positifs" et les "négatifs".

la méthode de tableaux est complète.

# Conditions sur les règles de réécriture

Sous l'hypothèse de confluence et pour:

- Une condition d'ordre: $\succ$ est bien-fondé, possède la propriété de la sous-formule, et si $P \longrightarrow^* Q$ alors $P \succ Q$.
- Une condition de positivité: si $A \longrightarrow P$ alors $P$ a des occurrences d'atomes uniquement positives.
- Une condition de positivité étendue: on peut classer les atomes en deux classes, les "positifs" et les "négatifs".
- Les deux conditions ensemble: $\mathcal{R}_{\succ} \cup \mathcal{R}_{+}$. À condition que ces deux derniers soient compatibles.

la méthode de tableaux est complète.

# Conditions sur les règles de réécriture

Sous l'hypothèse de confluence et pour:

- Une condition d'ordre: $\succ$ est bien-fondé, possède la propriété de la sous-formule, et si $P \longrightarrow^* Q$ alors $P \succ Q$.
- Une condition de positivité: si $A \longrightarrow P$ alors $P$ a des occurrences d'atomes uniquement positives.
- Une condition de positivité étendue: on peut classer les atomes en deux classes, les "positifs" et les "négatifs".
- Les deux conditions ensemble: $\mathcal{R}_\succ \cup \mathcal{R}_+$. À condition que ces deux derniers soient compatibles.
- La règle:

$$R \in R \longrightarrow_{\mathcal{R}} \forall y\ (\forall x(y \in x \Rightarrow R \in x) \Rightarrow (y \in R \Rightarrow (A \Rightarrow A)))$$

la méthode de tableaux est complète.

# Correction des tableaux

On prouve le théorème suivant:

### Théorème

*Si le tableau de $T\emptyset \Vdash \Gamma, F\emptyset \Vdash P$ a toutes ses branches fermées, alors on peut en tirer une preuve de $\Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} P$.*

- cela pose une difficulté: dans un tableau, on peut avoir plusieurs formules "fausses":

$$\begin{array}{c} F\emptyset \Vdash P \vee Q \\ | \\ F\emptyset \Vdash P \\ | \\ F\emptyset \Vdash Q \end{array}$$

On doit autoriser plusieurs formules à droite d'un séquent.

On prouve le théorème suivant:

**Théorème**

*Si le tableau de $T\emptyset \Vdash \Gamma, F\emptyset \Vdash P$ a toutes ses branches fermées, alors on peut en tirer une preuve de $\Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} P$.*

- cela pose une difficulté: dans un tableau, on peut avoir plusieurs formules "fausses":

$$\begin{array}{c} F\emptyset \Vdash P \vee Q \\ | \\ F\emptyset \Vdash P \\ | \\ F\emptyset \Vdash Q \end{array}$$

  On doit autoriser plusieurs formules à droite d'un séquent.

- on doit pouvoir dériver la règle suivante:

$$\frac{\Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A \vee B \quad \Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A \vee C}{\Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A \vee (B \wedge C)}$$

- on doit pouvoir dériver la règle suivante:

$$\frac{\Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A \vee B \quad \Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A \vee C}{\Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A \vee (B \wedge C)}$$

- on doit pouvoir dériver la règle suivante:

$$\frac{\Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A \vee B \quad \Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A \vee C}{\Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A \vee (B \wedge C)}$$

- facile avec la coupure:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A\vee B, A\vee C \vdash_{\mathcal{R}} A\vee(B\wedge C) \quad \Gamma, A\vee B \vdash_{\mathcal{R}} A\vee C}{\Gamma, A\vee B \vdash_{\mathcal{R}} A\vee(B\wedge C)} \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{R}} A \vee B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} A \vee (B \wedge C)} \text{ coupure}$$

- on doit pouvoir dériver la règle suivante:

$$\frac{\Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A \vee B \quad \Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A \vee C}{\Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A \vee (B \wedge C)}$$

- facile avec la coupure:

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma, A\vee B, A\vee C \vdash_{\mathcal{R}} A\vee(B\wedge C) \quad \Gamma, A\vee B \vdash_{\mathcal{R}} A\vee C}{\Gamma, A\vee B \vdash_{\mathcal{R}} A\vee(B\wedge C)} \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{R}} A \vee B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} A \vee (B \wedge C)}\ \text{coupure}$$

- on doit pouvoir dériver la règle suivante:

$$\frac{\Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A \vee B \quad \Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A \vee C}{\Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A \vee (B \wedge C)}$$

- facile avec la coupure:

$$\frac{\dfrac{\Gamma, A\vee B, A\vee C \vdash_{\mathcal{R}} A\vee(B\wedge C) \quad \Gamma, A\vee B \vdash_{\mathcal{R}} A\vee C}{\Gamma, A\vee B \vdash_{\mathcal{R}} A\vee(B\wedge C)} \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{R}} A \vee B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} A \vee (B \wedge C)} \text{ coupure}$$

- Sans coupure, montrer le lemme:

$$\begin{array}{rl} \Gamma_1 \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A \vee B & \Gamma_2 \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A \vee C \\ \text{alors} & \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A \vee (B \wedge C) \end{array}$$

# Élimination des coupures

On a fait le tour:

- Correction du calcul des séquents (induction simple):

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} P \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vDash P$$

- Complétude des tableaux intuitionnistes:

$$\Gamma \vDash P \quad \Rightarrow \quad T_{\emptyset} \Vdash \Gamma, F_{\emptyset} \Vdash P \hookrightarrow \bot$$

- Correction (forte) des tableaux intuitionnistes:

$$T_{\emptyset} \Vdash \Gamma, F_{\emptyset} \Vdash P \hookrightarrow \bot \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} P$$

On obtient:

# Élimination des coupures

On a fait le tour:

- Correction du calcul des séquents (induction simple):

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} P \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models P$$

- Complétude des tableaux intuitionnistes:

$$\Gamma \models P \quad \Rightarrow \quad T_{\emptyset} \Vdash \Gamma, F_{\emptyset} \Vdash P \hookrightarrow \bot$$

- Correction (forte) des tableaux intuitionnistes:

$$T_{\emptyset} \Vdash \Gamma, F_{\emptyset} \Vdash P \hookrightarrow \bot \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} P$$

On obtient:

- correction/complétudes des tableaux modulo.

# Élimination des coupures

On a fait le tour:

- Correction du calcul des séquents (induction simple):

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} P \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models P$$

- Complétude des tableaux intuitionnistes:

$$\Gamma \models P \quad \Rightarrow \quad T_{\emptyset} \Vdash \Gamma, F_{\emptyset} \Vdash P \hookrightarrow \bot$$

- Correction (forte) des tableaux intuitionnistes:

$$T_{\emptyset} \Vdash \Gamma, F_{\emptyset} \Vdash P \hookrightarrow \bot \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} P$$

On obtient:

- correction/complétudes des tableaux modulo.
- preuve constructive sémantique d'élimination des coupures.

# Contenu calculatoire: comparaison

Revenons sur la règle:

$$R \in R \longrightarrow_{\mathcal{R}} \forall y\ (\forall x(y \in x \Rightarrow R \in x) \Rightarrow (y \in R \Rightarrow (A \Rightarrow A)))$$

- ce ne peut pas être un algorithme de normalisation.

# Contenu calculatoire: comparaison

Revenons sur la règle:

$$R \in R \rightarrow_{\mathcal{R}} \forall y \; (\forall x (y \in x \Rightarrow R \in x) \Rightarrow (y \in R \Rightarrow (A \Rightarrow A)))$$

- ce ne peut pas être un algorithme de normalisation.
- c'est grosso-modo la méthode des tableaux décrite.