Méthodes Sémantiques en Déduction Modulo

Olivier Hermant

Mardi 6 Décembre 2005

Déduction et Calcul

- Le calcul est la base des mathématiques.

Déduction et Calcul

- Le calcul est la base des mathématiques.
- Il a été oublié par la formalisation.

Déduction et Calcul

- Le calcul est la base des mathématiques.
- Il a été oublié par la formalisation.
- retrouvé par les règles de réécriture.

Déduction et Calcul

- Le calcul est la base des mathématiques.
- Il a été oublié par la formalisation.
- retrouvé par les règles de réécriture.
- besoin d'un équilibre: la Déduction Modulo.

Systèmes de déduction: la logique

- le langage est celui de la logique du premier ordre.

Systèmes de déduction: la logique

- le langage est celui de la logique du premier ordre.
- un séquent: $\Gamma \vdash P$

Système de Déduction: le calcul des séquents

$$\frac{}{\Gamma, P \vdash P}\text{axiome} \qquad \frac{\Gamma, P \vdash Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q}\text{coupure}$$

$$\frac{\Gamma, P, P \vdash Q}{\Gamma, P \vdash Q}\text{contr-l} \qquad \frac{}{\Gamma, \bot \vdash Q}\bot\text{-g}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash R \quad \Gamma, Q \vdash R}{\Gamma, P \vee Q \vdash R}\vee\text{-g} \qquad \frac{\Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash P \vee Q}\vee\text{-d} \qquad \frac{\Gamma \vdash Q}{\Gamma \vdash P \vee Q}\vee\text{-d}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P \quad \Gamma, Q \vdash R}{\Gamma, P \Rightarrow Q \vdash R}\Rightarrow\text{-d} \qquad \frac{\Gamma, P \vdash Q}{\Gamma \vdash P \Rightarrow Q}\Rightarrow\text{-d}$$

$$\frac{\Gamma, \{c/x\}P \vdash Q}{\Gamma, \exists x P \vdash Q}\exists\text{-g}, \ c \text{ constante fraîche} \qquad \frac{\Gamma \vdash \{t/x\}P}{\Gamma \vdash \exists x P}\exists\text{-d}$$

La règle de coupure: le détour

$$\frac{\Gamma, P \vdash Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q}\text{coupure}$$

- on prouve $\Gamma \vdash P$
- on prouve $\Gamma, P \vdash Q$
- on a prouvé $\Gamma \vdash Q$

La règle de coupure: le détour

$$\frac{\Gamma, P \vdash Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q}\text{coupure}$$

- on prouve $\Gamma \vdash P$
- on prouve $\Gamma, P \vdash Q$
- on a prouvé $\Gamma \vdash Q$
- correspond à l'application d'un lemme.

Système de Déduction: le calcul des séquents

$$\frac{}{\Gamma, P \vdash P}\text{axiome} \qquad \frac{\Gamma, P \vdash Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q}\text{coupure}$$

$$\frac{\Gamma, P, P \vdash Q}{\Gamma, P \vdash Q}\text{contr-l} \qquad \frac{}{\Gamma, \bot \vdash Q}\bot\text{-g}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash R \quad \Gamma, Q \vdash R}{\Gamma, P \vee Q \vdash R}\vee\text{-g} \qquad \frac{\Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash P \vee Q}\vee\text{-d} \qquad \frac{\Gamma \vdash Q}{\Gamma \vdash P \vee Q}\vee\text{-d}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P \quad \Gamma, Q \vdash R}{\Gamma, P \Rightarrow Q \vdash R}\Rightarrow\text{-d} \qquad \frac{\Gamma, P \vdash Q}{\Gamma \vdash P \Rightarrow Q}\Rightarrow\text{-d}$$

$$\frac{\Gamma, \{c/x\}P \vdash Q}{\Gamma, \exists x P \vdash Q}\exists\text{-g},\ c \text{ constante fraîche} \qquad \frac{\Gamma \vdash \{t/x\}P}{\Gamma \vdash \exists x P}\exists\text{-d}$$

La règle de coupure: le détour

$$\frac{\Gamma, P \vdash Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q} \text{ coupure}$$

- on prouve $\Gamma \vdash P$ et $\Gamma, P \vdash Q$
- on a prouvé $\Gamma \vdash Q$.
- correspond à l'application d'un lemme: est adaptée pour un être humain.
- n'est pas adaptée aux systèmes de démonstration automatiques.

La règle de coupure: le détour

$$\frac{\Gamma, P \vdash Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q} \text{ coupure}$$

- on prouve $\Gamma \vdash P$ et $\Gamma, P \vdash Q$
- on a prouvé $\Gamma \vdash Q$.
- correspond à l'application d'un lemme: est adaptée pour un être humain.
- n'est pas adaptée aux systèmes de démonstration automatiques.
- elle est redondante !

La règle de coupure: le détour

$$\frac{\Gamma, P \vdash Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q} \text{ coupure}$$

- on prouve $\Gamma \vdash P$ et $\Gamma, P \vdash Q$
- on a prouvé $\Gamma \vdash Q$.
- correspond à l'application d'un lemme: est adaptée pour un être humain.
- n'est pas adaptée aux systèmes de démonstration automatiques.
- elle est redondante !
- deux méthodes principales de démonstration:
  - par la normalisation.

La règle de coupure: le détour

$$\frac{\Gamma, P \vdash Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q} \text{ coupure}$$

- on prouve $\Gamma \vdash P$ et $\Gamma, P \vdash Q$
- on a prouvé $\Gamma \vdash Q$.
- correspond à l'application d'un lemme: est adaptée pour un être humain.
- n'est pas adaptée aux systèmes de démonstration automatiques.
- elle est redondante !
- deux méthodes principales de démonstration:
  - par la normalisation.
  - par des méthodes sémantiques.

La règle de coupure: le détour

$$\frac{\Gamma, P \vdash Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q} \text{ coupure}$$

- on prouve $\Gamma \vdash P$ et $\Gamma, P \vdash Q$
- on a prouvé $\Gamma \vdash Q$.
- correspond à l'application d'un lemme: est adaptée pour un être humain.
- n'est pas adaptée aux systèmes de démonstration automatiques.
- elle est redondante !
- deux méthodes principales de démonstration:
  - par la normalisation.
  - par des méthodes sémantiques.
- son élimination implique de nombreuses propriétés fondamentales.

Axiomes vs. réécriture

Axiomes	Réécriture
$x + S(y) = S(x + y)$ $x + 0 = x$ $x * 0 = 0$ $x * S(y) = x + x * y$ $(x * y = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$	$x + S(y) \longrightarrow S(x + y)$ $x + 0 \longrightarrow x$ $x * 0 \longrightarrow 0$ $x * S(y) \longrightarrow x + x * y$ $(x * y = 0) \longrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$
$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\mathcal{T} \vdash 2 * 2 = 4}}{\mathcal{T} \vdash \exists x(2 * x = 4)}$	$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash_{\mathcal{R}} 4 = 4}}{\vdash_{\mathcal{R}} 2 * 2 = 4}}{\vdash_{\mathcal{R}} \exists x(2 * x = 4)}$

Déduction modulo: les règles de réécriture

- Forme générale:

$$l \longrightarrow r$$

Déduction modulo: les règles de réécriture

- Forme générale:

$$l \longrightarrow r$$

- utilisation: Si $t = l_\sigma$ alors on le remplace par r_σ

Déduction modulo: les règles de réécriture

- Forme générale:

$$l \longrightarrow r$$

- utilisation: Si $t = l_\sigma$ alors on le remplace par r_σ
- règles de réécriture sur des termes:

$$x + S(y) \longrightarrow S(x + y)$$

Déduction modulo: les règles de réécriture

- Forme générale:
$$l \longrightarrow r$$
- utilisation: Si $t = l_\sigma$ alors on le remplace par r_σ
- règles de réécriture sur des termes:
$$x + S(y) \longrightarrow S(x + y)$$
- et sur des **propositions**:
$$x * y = 0 \longrightarrow x = 0 \vee y = 0$$
- avantage: beaucoup de puissance.

Déduction modulo: le calcul des séquents modulo

$$\frac{}{\Gamma, P \vdash Q}\text{axiome } P \equiv_{\mathcal{R}} Q \qquad \frac{\Gamma, P \vdash Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q}\text{coupure } P \equiv_{\mathcal{R}} Q$$

$$\frac{\Gamma, P, Q \vdash R}{\Gamma, P \vdash R}\text{contr-g } P \equiv_{\mathcal{R}} Q \qquad \frac{}{\Gamma, P \vdash Q}\bot\text{-g } P \equiv_{\mathcal{R}} \bot$$

$$\frac{\Gamma \vdash P \quad \Gamma, Q \vdash R}{\Gamma, S \vdash R} \Rightarrow\text{-g } P \Rightarrow Q \equiv S \qquad \frac{\Gamma, P \vdash Q}{\Gamma \vdash S} \Rightarrow\text{-d } P \Rightarrow Q \equiv_{\mathcal{R}} S$$

$$\frac{\Gamma, \{c/x\}P \vdash Q}{\Gamma, R \vdash Q}\exists\text{-g}^* \ \exists x P \equiv_{\mathcal{R}} R \qquad \frac{\Gamma \vdash \{t/x\}P}{\Gamma \vdash R}\exists\text{-d } \exists x P \equiv_{\mathcal{R}} R$$

Déduction modulo: les règles de réécriture

- Forme générale :

$$l \longrightarrow r$$

- utilisation : Si $t = l_\sigma$ alors on le remplace par r_σ
- règles de réécriture sur des termes:

$$x + S(y) \longrightarrow S(x + y)$$

- et sur des **propositions**:

$$x * y = 0 \longrightarrow x = 0 \vee y = 0$$

- avantage: beaucoup de puissance.
- problème: la règle de coupure n'est pas forcément éliminable.

Déduction modulo: les règles de réécriture

- Forme générale :
$$l \longrightarrow r$$
- utilisation : Si $t = l_\sigma$ alors on le remplace par r_σ
- règles de réécriture sur des termes:
$$x + S(y) \longrightarrow S(x + y)$$
- et sur des **propositions**:
$$x * y = 0 \longrightarrow x = 0 \vee y = 0$$
- avantage: beaucoup de puissance.
- problème: la règle de coupure n'est pas forcément éliminable.
- trouver des conditions pouvant assurer l'élimination des coupures.

Sommaire

Les modèles

- en logique classique.
- extension des tables de vérité aux cas des quantificateurs.
- $|\exists x P| = 1$ si et seulement si il existe $d \in D$ tel que $|\{d/x\}P| = 1$.

Les modèles

- en logique classique.
- extension des tables de vérité aux cas des quantificateurs.
- $|\exists x P| = 1$ si et seulement si il existe $d \in D$ tel que $|\{d/x\}P| = 1$.
- en Déduction Modulo, une condition supplémentaire :

$$\text{si } P \equiv_{\mathcal{R}} Q \text{ alors } |P| = |Q|$$

Correction, Complétude

- Relier les deux approches: preuve et modèle.

Correction, Complétude

- Relier les deux approches: preuve et modèle.
- Correction: si $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \Delta$ alors $\Gamma \models_{\mathcal{R}} \Delta$. (confluence)

Correction, Complétude

- Relier les deux approches: preuve et modèle.
- Correction: si $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \Delta$ alors $\Gamma \models_{\mathcal{R}} \Delta$. (confluence)
- Complétude: si $\Gamma \models_{\mathcal{R}} \Delta$ alors $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \Delta$.

Correction, Complétude

- Relier les deux approches: preuve et modèle.
- Correction: si $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \Delta$ alors $\Gamma \models_{\mathcal{R}} \Delta$. (confluence)
- Complétude: si $\Gamma \models_{\mathcal{R}} \Delta$ alors $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \Delta$.
- autre formulation: si $\Gamma \nvdash_{\mathcal{R}}$ alors Γ possède au moins un modèle.

Correction, Complétude

- Correction: si $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \Delta$ alors $\Gamma \models_{\mathcal{R}} \Delta$.
- Complétude: si $\Gamma \models_{\mathcal{R}} \Delta$ alors $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \Delta$.

Complétude forte

- Correction: si $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \Delta$ alors $\Gamma \models_{\mathcal{R}} \Delta$.
- Complétude **forte** : si $\Gamma \models_{\mathcal{R}} \Delta$ alors $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} \Delta$.

Complétude forte

- Correction: si $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \Delta$ alors $\Gamma \models_{\mathcal{R}} \Delta$.
- Complétude **forte** : si $\Gamma \models_{\mathcal{R}} \Delta$ alors $\Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} \Delta$.
- corollaire: si $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \Delta$ alors $\Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} \Delta$

Complétude forte

- Correction: si $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \Delta$ alors $\Gamma \models_{\mathcal{R}} \Delta$.
- Complétude **forte** : si $\Gamma \models_{\mathcal{R}} \Delta$ alors $\Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} \Delta$.
- corollaire: si $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \Delta$ alors $\Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} \Delta$
- formulation équivalente: si $\Gamma \nvdash^{cf}_{\mathcal{R}}$ alors Γ a au moins un modèle.

Preuve de Henkin

- soit une théorie $\mathcal{T}$ telle que $\mathcal{T} \nvdash^{cf}$ (cohérente).
- on veut définir le modèle: $\mathcal{T} \vdash A$ ssi $|A| = 1$.
- il nous manque des informations.
  Par ex: si $\mathcal{T} = P \vee Q$.

Preuve de Henkin

- soit une théorie $\mathcal{T}$ telle que $\mathcal{T} \nvdash^{cf}$ (cohérente).
- on veut définir le modèle: $\mathcal{T} \vdash A$ ssi $|A| = 1$.
- il nous manque des informations.
  Par ex: si $\mathcal{T} = P \vee Q$.
- on doit la **compléter** en Γ.
- Γ doit être **cohérente**, et
- doit admettre des **témoins** existentiels.

Preuve de Henkin

- soit une théorie $\mathcal{T}$ telle que $\mathcal{T} \nvdash^{cf}$ (cohérente).
- on veut définir le modèle: $\mathcal{T} \vdash A$ ssi $|A| = 1$.
- il nous manque des informations.
  Par ex: si $\mathcal{T} = P \vee Q$.
- on doit la **compléter** en Γ.
- Γ doit être **cohérente**, et
- doit admettre des **témoins** existentiels.
- définition du modèle: $\Gamma \vdash A$ ssi $|A| = 1$.

Nouvelles définitions

- théorie complète: $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} A$ implique $A \in \Gamma$.

Nouvelles définitions

- théorie complète: $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} A$ implique $A \in \Gamma$.
- théorie complète sans coupure: $\Gamma, A \nvdash_{\mathcal{R}}^{cf}$ implique $A \in \Gamma$.

Nouvelles définitions

- théorie complète: $\Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A$ implique $A \in \Gamma$.
- théorie complète sans coupure: $\Gamma, A \nvdash^{cf}_{\mathcal{R}}$ implique $A \in \Gamma$.
- on peut très bien avoir: $\Gamma, A \vdash^{cf}_{\mathcal{R}}$, $\Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A$ **et** Γ cohérente!

$$\frac{\Gamma, A \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} \qquad \Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A}{\Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}}}\textbf{coupure}$$

Nouvelles définitions

- théorie complète: $\Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A$ implique $A \in \Gamma$.
- théorie complète sans coupure: $\Gamma, A \nvdash^{cf}_{\mathcal{R}}$ implique $A \in \Gamma$.
- on peut très bien avoir: $\Gamma, A \vdash^{cf}_{\mathcal{R}}$, $\Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A$ **et** Γ cohérente!

$$\frac{\Gamma, A \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} \qquad \Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A}{\Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}}}\textbf{coupure}$$

- Les définitions deviennent donc :
  - Cohérence: $\Gamma \nvdash^{cf}_{\mathcal{R}} \bot$
  - Complétude (saturation): $\Gamma, P \vdash^{cf}_{\mathcal{R}}$ ou $P \in \Gamma$.
  - témoins de Henkin: $\Gamma, \exists x P \nvdash^{cf}_{\mathcal{R}}$ implique $\{t/x\}P \in \Gamma$ pour un certain t.

Complétion de Henkin

Soit une théorie cohérente Γ_0, on la sature:

- Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de constantes fraîches (par rapport à Γ_0)

$\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ et Γ est cohérent, complète, et admet des témoins de Henkin.

Complétion de Henkin

Soit une théorie cohérente Γ_0, on la sature:

- Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de constantes fraîches (par rapport à Γ_0)
- on énumère les propositions du langage enrichi:

$$P_0, \ldots, P_n, \ldots$$

$\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ et Γ est cohérent, complète, et admet des témoins de Henkin.

Complétion de Henkin

Soit une théorie cohérente Γ_0, on la sature:

- Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de constantes fraîches (par rapport à Γ_0)
- on énumère les propositions du langage enrichi:

$$P_0, ..., P_n, ...$$

  - si $\Gamma_n, P_n \not\vdash^{cf}_{\mathcal{R}}$ alors $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{P_n\}$
  - de plus si P_n est quantifiée existentiellement ($P = \exists x Q$), soit $c \in \mathcal{C}$ fraîche. On pose $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{P_n, \{c/x\}Q\}$ fresh, so taken in C
  - Sinon, $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$

$\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ et Γ est cohérent, complète, et admet des témoins de Henkin.

Complétion de Henkin

Soit une théorie cohérente Γ_0, on la sature:

- Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de constantes fraîches (par rapport à Γ_0)
- on énumère les propositions du langage enrichi:

$$P_0, ..., P_n, ...$$

  - si $\Gamma_n, P_n \nvdash_{\mathcal{R}}^{cf}$ alors $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{P_n\}$
  - de plus si P_n est quantifiée existentiellement ($P = \exists x Q$), soit $c \in \mathcal{C}$ fraîche. On pose $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{P_n, \{c/x\}Q\}$ fresh, so taken in C
  - Sinon, $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$
- On pose $\Gamma = \bigcup \Gamma_n$

$\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ et Γ est cohérent, complète, et admet des témoins de Henkin.

Définition du modèle: Modulo le 3ème type

$$\begin{array}{rcl} \Gamma, A \not\vdash^{cf}_{\mathcal{R}} & \Rightarrow & |A| := 1 \\ \Gamma \not\vdash^{cf}_{\mathcal{R}} & \Rightarrow & |A| := 0 \end{array}$$

- Que fait on des propositions du troisième type?
- On a l'obligation d'avoir:

$$P \equiv_{\mathcal{R}} Q \text{ implique } |P| = |Q|$$

Définition du modèle: Modulo le 3ème type

$$\begin{aligned} \Gamma, A \nvdash^{cf}_{\mathcal{R}} &\Rightarrow |A| := 1 \\ \Gamma \nvdash^{cf}_{\mathcal{R}} &\Rightarrow |A| := 0 \end{aligned}$$

- Que fait on des propositions du troisème type?
- On a l'obligation d'avoir:

$$P \equiv_{\mathcal{R}} Q \text{ implique } |P| = |Q|$$

- Pas un degré de liberté, une contrainte supplémentaire.
- C'est **ici** qu'interviennent les conditions sur les règles de réécriture.
- Jusque là, on a un traitement uniforme.

Condition d'ordre

Condition On suppose qu'il existe un ordre bien fondé $\succ$ tel que:

- Il possède la propriété de la sous-formule. Si P est une sous-formule de Q, alors $Q \succ P$. Ex:

$$P \wedge (\exists x Q(x)) \succ \exists x Q(x) \succ Q(0)$$

- $\mathcal{R}$ satisfait cet ordre: si $A \rightarrow B$ alors $A \succ B$.

Condition d'ordre

Condition On suppose qu'il existe un ordre bien fondé $\succ$ tel que:

- Il possède la propriété de la sous-formule. Si P est une sous-formule de Q, alors $Q \succ P$. Ex:

$$P \wedge (\exists x Q(x)) \succ \exists x Q(x) \succ Q(0)$$

- $\mathcal{R}$ satisfait cet ordre: si $A \rightarrow B$ alors $A \succ B$.

- interprétation des atomes normaux:

$$\begin{array}{rcl} \Gamma, A \nvdash^{cf}_{\mathcal{R}} & \Rightarrow & |A| := 1 \\ & \text{sinon} & |A| := 0 \end{array}$$

Condition d'ordre

Condition On suppose qu'il existe un ordre bien fondé $\succ$ tel que:

- Il possède la propriété de la sous-formule. Si P est une sous-formule de Q, alors $Q \succ P$. Ex:

$$P \wedge (\exists x Q(x)) \succ \exists x Q(x) \succ Q(0)$$

- $\mathcal{R}$ satisfait cet ordre: si $A \longrightarrow B$ alors $A \succ B$.

- interprétation des atomes normaux:

$$\begin{array}{lcl} \Gamma, A \nvdash^{cf}_{\mathcal{R}} & \Rightarrow & |A| := 1 \\ & \text{sinon} & |A| := 0 \end{array}$$

- interprétation des formules: construction d'un arbre.

$$\begin{tikzcd} & P \wedge Q \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ P & & Q \\ \vdots & & \vdots \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \exists x R(x) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ R(t_0) & \ldots & R(t_n) \\ \vdots & & \vdots \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[d] \\ A\downarrow \\ \vdots \end{tikzcd}$$

Condition de positivité

Condition On suppose que les règles propositionnelles sont positives. si $A \rightarrow P \in \mathcal{R}$ alors les propositions atomiques de P occurent à des positions positives. Ex:

$$\begin{aligned} A(0) &\rightarrow \forall x A(x) \\ A(1) &\rightarrow B \wedge A(0) \end{aligned}$$

Condition de positivité

Condition On suppose que les règles propositionnelles sont positives. si $A \longrightarrow P \in \mathcal{R}$ alors les propositions atomiques de P occurent à des positions positives. Ex:

$$\begin{array}{ll} A(0) & \longrightarrow \forall x A(x) \\ A(1) & \longrightarrow B \wedge A(0) \end{array}$$

- Pour chaque atome A (y compris non atomique):

$$\begin{array}{lll} \text{si } \Gamma, A \nvdash^{cf}_{\mathcal{R}} & \text{alors} & |A| := 1 \\ & \text{sinon} & |A| := 0 \end{array}$$

Condition de positivité

Condition On suppose que les règles propositionnelles sont positives.
si $A \longrightarrow P \in \mathcal{R}$ alors les propositions atomiques de P occurent à des positions positives. Ex:

$$\begin{array}{ll} A(0) & \longrightarrow \forall x A(x) \\ A(1) & \longrightarrow B \wedge A(0) \end{array}$$

- Pour chaque atome A (y compris non atomique):

$$\begin{array}{lll} \text{si } \Gamma, A \nvdash^{cf}_{\mathcal{R}} & \text{alors} & |A| := 1 \\ & \text{sinon} & |A| := 0 \end{array}$$

- plus petit point fixe de Dowek, Werner.

Condition de positivité

Condition On suppose que les règles propositionnelles sont positives. si $A \longrightarrow P \in \mathcal{R}$ alors les propositions atomiques de P occurent à des positions positives. Ex:

$$\begin{array}{ll} A(0) & \longrightarrow \forall x A(x) \\ A(1) & \longrightarrow B \wedge A(0) \end{array}$$

- Pour chaque atome A (y compris non atomique):

$$\begin{array}{lll} \text{si } \Gamma, A \nvdash^{cf}_{\mathcal{R}} & \text{alors} & |A| := 1 \\ & \text{sinon} & |A| := 0 \end{array}$$

- plus petit point fixe de Dowek, Werner.
- point difficile: prouver que c'est un modèle des règles de réécriture.

Deux conditions ensemble

Condition On peut emboîter les deux conditions précédentes.

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\succ} \bigcup \mathcal{R}_{+}$$

à condition que les règles de réécriture de $\mathcal{R}_{+}$ soient normales pour $\mathcal{R}_{\succ}$.

Construction du modèle:

Deux conditions ensemble

Condition On peut emboîter les deux conditions précédentes.

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\succ} \bigcup \mathcal{R}_{+}$$

à condition que les règles de réécriture de $\mathcal{R}_{+}$ soient normales pour $\mathcal{R}_{\succ}$.

Construction du modèle:

1. on interprète tous les atomes $\mathcal{R}_{\succ}$-normaux.

Deux conditions ensemble

Condition On peut emboîter les deux conditions précédentes.

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\succ} \bigcup \mathcal{R}_{+}$$

à condition que les règles de réécriture de $\mathcal{R}_{+}$ soient normales pour $\mathcal{R}_{\succ}$.

Construction du modèle:

1. on interprète tous les atomes $\mathcal{R}_{\succ}$-normaux.
2. on définit l'interprétation par induction sur $\succ$.

Deux conditions ensemble

Condition On peut emboîter les deux conditions précédentes.

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\succ} \bigcup \mathcal{R}_{+}$$

à condition que les règles de réécriture de $\mathcal{R}_{+}$ soient normales pour $\mathcal{R}_{\succ}$.

Construction du modèle:

1. on interprète tous les atomes $\mathcal{R}_{\succ}$-normaux.
2. on définit l'interprétation par induction sur $\succ$.
3. on prouve que c'est aussi un modèle de $\mathcal{R}_{+}$.

La normalisation: contre-exemple

- la règle de Dowek et Werner:

$$R \in R \longrightarrow \forall y (y \simeq R \Rightarrow \neg y \in R)$$

  - est incohérente:

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash_{\mathcal{R}} R \in R} \quad \dfrac{\vdots}{R \in R \vdash_{\mathcal{R}}}}{\vdash_{\mathcal{R}}} \text{ coupure}$$

  - ne possède pas la propriété de normalisation: le procédé de réduction boucle.

La normalisation: contre-exemple

- la règle de Dowek et Werner:

$$R \in R \longrightarrow \forall y (y \simeq R \Rightarrow \neg y \in R)$$

  - est incohérente:

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash_{\mathcal{R}} R \in R} \quad \dfrac{\vdots}{R \in R \vdash_{\mathcal{R}}}}{\vdash_{\mathcal{R}}} \text{ coupure}$$

  - ne possède pas la propriété de normalisation: le procédé de réduction boucle.
- première modification: remplacer $\neg P$ par $P \Rightarrow C$.

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash_{\mathcal{R}} R \in R, C} \quad \dfrac{\vdots}{R \in R \vdash_{\mathcal{R}} C}}{\vdash_{\mathcal{R}} C} \text{ coupure}$$

  - est cohérente.
  - ne normalise toujours pas.

La normalisation: contre-exemple

- raffinons encore un peu: C remplacé par $A \vee \neg A$.

La normalisation: contre-exemple

- raffinons encore un peu: C remplacé par $A \vee \neg A$.
- on a toujours:

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash_{\mathcal{R}} R \in R, A \vee \neg A} \quad \dfrac{\vdots}{R \in R \vdash_{\mathcal{R}} A \vee \neg A}}{\vdash_{\mathcal{R}} A \vee \neg A} \text{ coupure}$$

La normalisation: contre-exemple

- raffinons encore un peu: C remplacé par $A \vee \neg A$.
- on a toujours:

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash_{\mathcal{R}} R \in R, A \vee \neg A} \quad \dfrac{\vdots}{R \in R \vdash_{\mathcal{R}} A \vee \neg A}}{\vdash_{\mathcal{R}} A \vee \neg A} \text{ coupure}$$

- mais on a aussi :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A} \text{ axiome}}{\vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A, \neg A} \neg\text{-droit}}{\vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A \vee \neg A} \vee\text{-droit}$$

La normalisation: contre-exemple

- raffinons encore un peu: C remplacé par $A \vee \neg A$.
- on a toujours:

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash_{\mathcal{R}} R \in R, A \vee \neg A} \quad \dfrac{\vdots}{R \in R \vdash_{\mathcal{R}} A \vee \neg A}}{\vdash_{\mathcal{R}} A \vee \neg A} \text{ coupure}$$

- mais on a aussi :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A} \text{ axiome}}{\vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A, \neg A} \text{ $\neg$-droit}}{\vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A \vee \neg A} \text{ $\vee$-droit}$$

- est-ce généralisable ?

La normalisation: contre-exemple

La règle: $R \in R \rightarrow \forall y(y \simeq R \Rightarrow (y \in R \Rightarrow (A \vee \neg A)))$

- C'est une tautologie (classique).

La normalisation: contre-exemple

La règle: $R \in R \rightarrow \forall y(y \simeq R \Rightarrow (y \in R \Rightarrow (A \vee \neg A)))$

- C'est une tautologie (classique).
- Tout modèle booléen est modèle de $\mathcal{R}$. Élimination des coupures.

La normalisation: contre-exemple

La règle: $R \in R \rightarrow \forall y(y \simeq R \Rightarrow (y \in R \Rightarrow (A \vee \neg A)))$

- C'est une tautologie (classique).
- Tout modèle booléen est modèle de $\mathcal{R}$. Élimination des coupures.
- Pas de normalisation. Le processus de réduction boucle toujours: $C \sim A \vee \neg A$.

Sémantiques intuitionnistes

- Algèbres de Heyting.
- Structures de Kripke.

Sémantiques intuitionnistes

- Algèbres de Heyting.
- Structures de Kripke.

$$\begin{tikzcd} \beta & & \gamma \\ & \alpha \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

- $\alpha \Vdash A \Rightarrow B$ ssi $\forall \beta \geq \alpha$, $\beta \Vdash A$ implique $\beta \Vdash B$.

Élimination des coupures intuitionniste

- Extension directe des preuves classiques.

Élimination des coupures intuitionniste

- Extension directe des preuves classiques.
- À condition de raffiner les définitions:
  - A-cohérence: $\Gamma \nvdash^{cf}_{\mathcal{R}} A$
  - A-complétude:$\Gamma, P \nvdash^{cf}_{\mathcal{R}} A$ implique $P \in \Gamma$
  - A-témoins de Henkin.

Élimination des coupures intuitionniste

- Extension directe des preuves classiques.
- À condition de raffiner les définitions:
  - A-cohérence: $\Gamma \nvdash^{cf}_{\mathcal{R}} A$
  - A-complétude:$\Gamma, P \nvdash^{cf}_{\mathcal{R}} A$ implique $P \in \Gamma$
  - A-témoins de Henkin.
- $K = \{\Gamma | \Gamma, A\text{-complètes, -cohérentes, -Henkin}\}$
- $P \in \Gamma$ implique $\Gamma \Vdash P$

Contenu calculatoire

- Ne peut pas être la normalisation.

Contenu calculatoire

- Ne peut pas être la normalisation.
- la contraposée de la complétude: un contre-modèle.
- Impossibilité de le construire: une preuve de $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} \Delta$

Contenu calculatoire

- Ne peut pas être la normalisation.
- la contraposée de la complétude: un contre-modèle.
- Impossibilité de le construire: une preuve de $\Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} \Delta$
- Construction d'un tableau.

$\mathcal{M}$*erci*